Una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales (CPMF):

¿Cuáles son las matemáticas que docentes de primaria deberían comprender y cómo influyen en lo que aprendan estudiantes?

Patrick Scott

Programa de Estándares e Investigación Educativa

USAID | Guatemala

¿Qué significa una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales (CPMF)?

“CPMF es más que una comprensión conceptual firme de las matemáticas del nivel primario –

es una conciencia de la estructura conceptual y de las actitudes básicas de las matemáticas inherentes en la primaria

y la capacidad de proporcionar una base de dicha estructura conceptual e inclucar dichas actitudes básicas en estudiantes”.

Ma, Liping (1999) *Conocer y enseñar las matemáticas de primaria*, Erlbaum, New Jersey

El estudio doctoral de Liping Ma

Compara docentes de primaria de China con los de los EEUU.

Una paradoja:

Estudiantes de China rinden mejor que los de los EEUU en comparaciones internacionales, pero

docentes chinos tienen menos años de educación formal (11-12 vs 16-18)

Un buen artículo sobre el libro de Ma: www.aft.org/pubs-reports/american_educator/fall99/amed1.pdf

¿Qué dice la maestra de Ma?

“Docentes tienen que tener la capacidad de hacer las matemátics que están enseñando,

pero dicho conocimiento no es suficiente si uno va a enseñar.

La enseñanza eficaz requiere una comprensión del significado subyacente y de las justificaciones de las ideas y los procedimientos a enseñar,

y una capacidad de hacer las conexiones entre temas”.

(Ball et al., 2005, *Terreno Común*, p. 4)

www.ams.org/notices/200509/comm-schmid.pdf

¿Y qué más dice y hace?

Conocimiento matemático para enseñar - Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)

Ya han desarrollado pruebas de opción múltiple para medirlo

Con las pruebas han comprobado que estudiantes con docentes con más MKT aprenden más matemáticas.

www-personal.umich.edu/~dball/articles/HillRowanBallAERJSummer05.pdf

sitemaker.umich.edu/lmt/files/LMT_sample_items.pdf

Una Idea Afín

Conocimiento pedagógico de la disciplina (*pedagogical content knowledge*) presentado por Lee Shulman (1986, 1987).

Tener una comprensión profunda y flexible de los contenidos ayuda a docentes en hacerlos accesibles a estudiantes.

¿Otra Idea Afín?

"Los EEUU es uno de los pocos países del mundo que sigue pretendiendo – a pesar de mucha evidencia al contrario – que docentes de primaria son capaces de enseñar todos las materias con la misma eficacia.

Ya es hora de identificar un cuerpo de docentes con interés especial en matemáticas y ciencias quienes estaría bien preparado para enseñar matemáticas y ciencias en un ambiente integrada y basada en el descubrimiento."

NRC, 1989, *Todo el Mundo Cuenta (Everybody Counts)*

www.nap.edu/openbook.php?isbn=0309039770

Escenario 1 (ó 3)

“Parece que la gente tiene diferentes maneras de resolver ejercicios con la división con fracciones.

¿Cómo es que Ud. resuelve el siguiente?

$$1\frac{3}{4} \quad \frac{1}{2} =$$

Imaginen que estén enseñando la divisón con fracciones a niños. Para dar sentido a esto, algunos docentes tratan de relacionar con una situación de la vida real. ¿Cuál sería un buen problema de planteo o modelo para $1\frac{3}{4} \quad \frac{1}{2}$?

Resultados en el estudio de Ma

Solamente un 43% de la muestra de docentes de USA lo resolvió correctamente.

¡100% de docentes chinos!

“No debemos razonar, solamente invertir y multiplicar”

En vez de “invertir y multiplicar” los chinos dijeron “dividir por un número que es el equivalente de multiplicar por su recíproco”

¡No se usa para recordar, se usa para justificar!

Respuestas equivocadas en USA

“Por alguna razón me suena que se invierta una de las fracciones.

Pues, ó $^{7}/_{4}$ llega a ser $^{4}/_{7}$ ó ½ llega a ser $^{2}/_{1}$”

“Intentaría encontrar, Dios mío,

el mínimo común denominador.

Pienso que cambiaría los dos. El mínimo común denominador, creo que así se llama. No sé que voy a hacer para sacar la respuesta. Ups. Lo siento.”

Los Chinos encuentran sentido al algoritmo

Una fracción es el resultado de una división

$$1\tfrac{3}{4} \quad \tfrac{1}{2} = 1\tfrac{3}{4} \quad (1 \quad 2)$$

$$= 1\tfrac{3}{4} \quad 1 \quad 2$$

$$= 1\tfrac{3}{4} \quad 2 \quad 1$$

$$= 1\tfrac{3}{4} \quad (2 \quad 1)$$

$$= 1\tfrac{3}{4} \quad 2$$

“No es nada difícil.

Hasta puedo dar algunas ecuaciones con números simples a estudiantes y pedirles que demuestren la regla por su propia cuenta”

Encontrarle sentido al algoritmo 2

“Mantener el valor del cociente”

“Cuando el dividiendo y el divisor se multiplican o dividen por el mismo número, el cociente no cambia”

$$1\tfrac{3}{4} \quad \tfrac{1}{2} = (1\tfrac{3}{4} \quad {}^{2}/_{1}) \quad (\tfrac{1}{2} \quad {}^{2}/_{1})$$

$$= (1\tfrac{3}{4} \quad {}^{2}/_{1}) \quad 1$$

$$= 1\tfrac{3}{4} \quad {}^{2}/_{1}$$

$$= 3\tfrac{1}{2}$$

“Con este procedimiento se puede explicar a estudiantes que este algoritmo que parece arbitrario es razonable.”

Hacer sentido del algoritmo 3

Usar el sentido de 1¾ ½

"1¾ ½ quiere decir que ½ de un número es 1¾.

La respuesta, como uno puede imaginar será de 3½, que es exactamente lo mismo que la respuesta a 1¾ 2.

2 es el recíproco de ½.

Así es cómo lo explicaría a mis alumnos.

Primer algoritmo alternativo

Uso de decimales:

$$1\frac{3}{4} \quad \frac{1}{2} = 1.75 \quad 0.5 = 3.5,$$

pero a veces es más fácil usar fracciones:

$$0.3 \quad 0.8$$

Varias ventajas:

- **Revisar lo que ya aprendieron**
- **La conversión profundiza su comprensión**
- **Práctica en la resolución de problemas a través de maneras alternativas**

Segundo algoritmo alternativo

Uso de la distributividad

$$1\tfrac{3}{4} \quad \tfrac{1}{2} = \left(1 + \tfrac{3}{4}\right) \quad \tfrac{1}{2}$$

$$= \left(1 \quad \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{3}{4} \quad \tfrac{1}{2}\right)$$

$$= 2 + 1\tfrac{1}{2}$$

$$= 3\tfrac{1}{2}$$

Lo más interesante es la confianza con que usan la ley de distributividad y su comprensión de números mixtos.

Tercer algoritmo alternativo

Sin el uso de multiplicación

$$1\tfrac{3}{4} \quad \tfrac{1}{2} = {}^{7}/_{4} \quad \tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{7 \quad 1}{4 \quad 2}$$

$$= {}^{7}/_{2}$$

$$= 3\tfrac{1}{2}$$

“De hecho, división es más complicada que la multiplicación. Pero en este caso, no.”

“Alumnos no deben tener solamente varias maneras de resolver los problemas, pero la capacidad de evaluar y seleccionar la mejor.”

¿Y una situación real?

Solamente una de las maestras en USA sugirió una situación correcta:

Tengo $1\frac{3}{4}$ champurradas.

Quiero dar $\frac{1}{2}$ champurrada a cada niño.

¿Cuántos niños van a recibir parte de una champurrada?

¿¿$3\frac{1}{2}$ niños??

¡El pobre $\frac{1}{2}$ niño!

¡Por lo menos recibe $\frac{1}{2}$ champurrada!

“Pedagógicamente problemático”

¿Las muy incorrectas?

- 43% confundieron división por ½ con división por 2
  - Muchos ejemplos con comida redonda (pasteles, pizzas, etc.)
  - Una pizza completa y ¾ de otra, y se dividen entre 2 personas.
- 26% confundieron división por ½ con mulitiplicación por ½
  - Una pizza completa y ¾ de otra, y agarra la mitad del total

Representaciones chinas

Parten de uno de los modelos de división:

- **8 m / 2 m = 4 (modelo de medida)**
- **8 m / 2 = 4 m (modelo partitivo)**
- **8 m^2 / 2 m = 4 m (producto y factores)**

Un equipo de trabajadores construyeron ½ km de camino cada día, ¿cuántos días necesitan para construir un camino de 1¾ km?

Dado que vamos a tener porciones de ½ manzana, ¿cuántas porciones tenemos de 1¾ manzanas?

¡½ porción, sí! ¡½ niño, no!

El modelo partitivo, el preferido

Ayer fui en mi bicicleta de La Estancia hasta La Cuesta. Pasé 1¾ horas en ½ del viaje. ¿Cuánto tiempo duró el viaje?

Una fábrica usa 1¾ toneladas de acero para construir una máquina, lo que significa ½ de lo que usaba antes. ¿Cuánto acero usaba antes para producir una máquina?

Sabemos cuánto aceite hay en una botella grande, pero solamente tenemos una escala pequeña. Sacamos la mitad del aciete de la botella y encontramos que tenemos 1 ¾ kg. ¿Cuánto aciete había en total?

Escenario 2 (ó 4)

“Imagine que uno de sus estudiantes llegue a su clase muy emocionada.

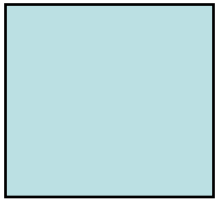
Dice que ha llegado a una teoría que Ud nunca ha enseñado.

Explica que ha descubierto que cuando el perímetro de una figura cerrada se aumenta, el área también se aumenta.

Le muestra el siguiente dibujo para “demostrar” lo que está diciendo:

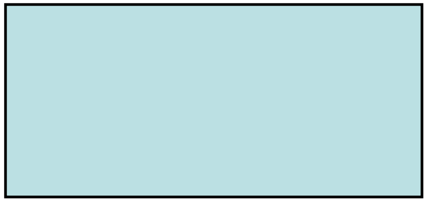
4 cm

4 cm



8 cm

4 cm



perímetro = 16 cm

área = 16 cm^2

perímetro = 24 cm

área = 32 cm^2

¿Cómo respondería a la alumna?

La Respuesta en USA

- Solamente un 9% aceptó lo que dijo.
- Pero un 22% dijo “consultaría un texto”
  - Algunos por no poder calcular perímetro y área
- 57%: “pediría más ejemplos”
  - Un ejemplo no es suficiente, ¿pero cuántos?
- Solamente un 13% usó un argumento matemático, pero solamente 1 correctamente
  - Si tenemos 2 por 16, ¿cuál es el perímetro? y ¿cuál es el área?
  - Es decir, un contraejemplo

La Respuesta en China

- 8% lo aceptó sin comentarios
- Los demás tenían que pensar mucho
- Sus respuestas difieren de los de USA de 3 maneras:
  - Expresaron interés en el tema no solamente la afirmación
  - Realizaron exploraciones matemáticas (nadie dijo que fuera necesario consultar un texto) pero “solamente” un 70% lo resolvió correctamente
  - Tenían más comprensión de geometría elemental

Una Conclusión de Ma

“En USA muchos piensan que las matemáticas de primaria son ´básicas´, superficiales y comunmente entendidas. …

Las matemáticas de primaria no son superficiales para nada, y cualquier persona que las enseña tiene que estudiar duro para entenderlas de una manera extensa”

La Educación Matemática de Docentes

Documento preparado por la Sociedad Americana de Matemáticas (AMS) y la Asociación Matemática de América

(CBMS, 2001)

www.cbmsweb.org/MET_Document/

Recomendación 1

Futuros docentes necesitan cursos de matemáticas que desarrollan una comprensión profunda de las matemáticas que van a enseñar.

[No solamente la memorización superficial de algunos procedimientos matemáticos que no van a enseñar]

Recomendación 2

Aunque la calidad de la preparación matemática es más importante que la cantidad, se recomienda

3 cursos para docentes de primaria

7 cursos para docentes de secundaria (con 4 de ellos enfocados en las matemáticas de secundaria)

Lo equivalente de una licenciatura en matemáticas para los de media superior (con 2 que conectan las matemáticas universitarias con las matemáticas de media superior)

Recomendación 3

Un enfoque en un desarrollo cuidadoso de ideas matemáticas básicas.

“una atención a la aplicabilidad amplia y flexible de ideas básicas y modos de razonamiento es preferible a cubrir mucha materia superficialmente”

Recomendación 4

Junto con la construcción de conocimientos matemáticos, los cursos deberían desarrollar los hábitos de la mente de un pensador matemático y mostrar un estilo de enseñanza flexible e interactivo.

“Dictar” clases sin errores y explicar bien no es suficiente

Recomendación 5

La educación de docentes tiene que ser reconocido como un componente importante de la misión de departamentos de matemáticas en las instituciones que forman docentes.

Más matemáticos deben considerar un compromiso profundo a la educación matemática pre-universitaria.

Recomendación 6

La educación matemática de docentes debería considerarse como una colaboración entre profesores de matemáticas y profesores de educación matemática.

Recomendación 7

Se necesita más cooperación entre las varias instituciones de educación superior en la educación matemática de docentes.

En los EEUU esto significa entre las instituciones de 2 años (*community colleges*) y de 4 años (universidades).

¿Qué significaría en Guatemala?

Recomendación 8

Se necesita más colaboración entre profesores de matemáticas de las instituciones de educación superior y docentes de matemáticas en las escuelas.

- La observación de clases en las escuelas ayuda a los profes que trabajan en la formación de docentes
- Docentes experimentados también pueden ayudar en la formación
- Profesores universitarios pueden ayudar en el desarrollo profesional de docentes

Recomendación 9

Los esfuerzos para mejorar el nivel de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas se mejorarán con la participación realmente comprometida de la comunidad académica de las matemáticas.

Recomendación 10

Los docentes necesitan oportunidades para desarrollar la comprensión de las matemáticas y su enseñanza a lo largo de sus carreras,

a través del estudio autodirigido compartiendo con colegas, y a través de cursos formales.

patrick.scott@state.nm.us

Muchas Gracias

Les deseo mucho éxito y mucha suerte